

Mécanique classique | Chapitre 7 | Correction TD (M7)

Exercice n°1 • Mouvement 2D avec un ressort

cours

1) Le poids et la réaction normale du support se compense. La résultante des forces est donc égale à la force de rappel du ressort qui est une force centrale conservative.

2) On sait alors que le moment cinétique se conserve. Donc :

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= r \vec{e}_r \wedge m \left(\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \right) = mr^2 \dot{\theta} \vec{e}_z \\ &= r_0 \vec{e}_r \wedge m \vec{v}_0 = mr_0 v_0 \sin(\alpha) \vec{e}_z\end{aligned}$$

On identifie donc :

$$\frac{\|\vec{L}_O\|}{m} = \boxed{C = r^2 \dot{\theta} = r_0 v_0 \sin(\alpha)}$$

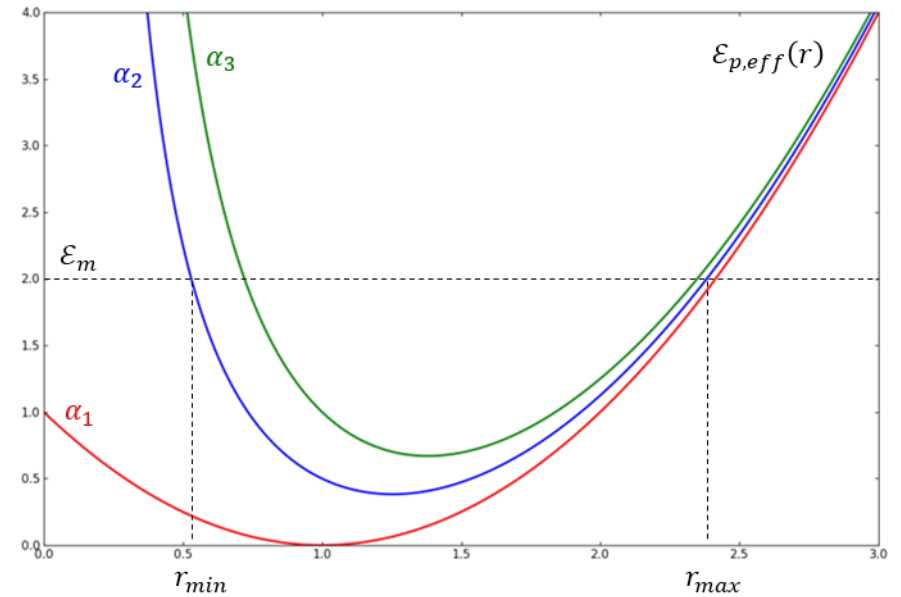
3) L'énergie mécanique vaut :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(\ell(t) - \ell_0)^2 \\ &= \boxed{\frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 \right) + \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2} \\ &= \boxed{\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k(r_0 - \ell_0)^2}\end{aligned}$$

4) On identifie l'énergie potentielle effective :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2}_{\mathcal{E}_{p,eff}(r)}$$

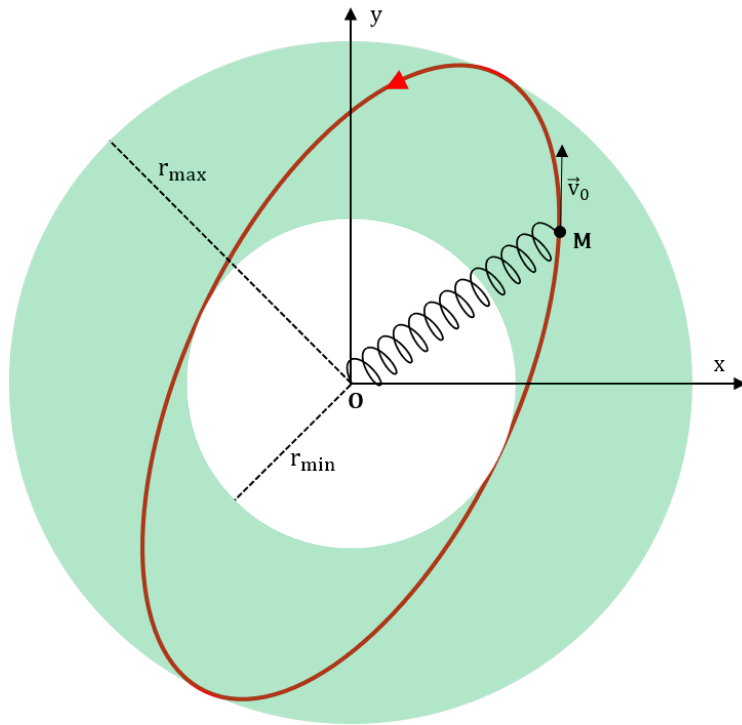
Graphe :



Si $\alpha = 0$, la courbe est une parabole. Si $\alpha > 0$, la courbe diverge nécessairement en 0. Plus α se rapproche de $\pi/2$, plus l'énergie potentielle effective est grande (pour un r donné). Donc la courbe verte est toujours au-dessus de la bleue.

4) Si $\alpha = 0$ on a des oscillations sans variation de θ (cas du système masse-ressort vu jusqu'à présent). Si $\alpha \neq 0$, la masse décrit une trajectoire bornée entre r_{min} et r_{max} (donnés par l'intersection entre $\mathcal{E}_m$ et $\mathcal{E}_{p,eff}$). Sans indication supplémentaire, on ne peut rien dire de plus.

En revanche, si on sait que la trajectoire est une ellipse :



Exercice n°2 • Mise en orbite



1) Le satellite, immobile dans le référentiel terrestre décrit dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_{geo}$ un cercle de rayon $R_T \cos \lambda$ en $T = 24$ h. Sa vitesse vaut donc :

$$v_0 = \frac{2\pi}{T} R_T \cos \lambda$$

2) Son énergie mécanique initiale vaut, dans $\mathcal{R}_{geo}$:

$$\mathcal{E}_{m,0} = -\frac{GmM_T}{R_T} + \frac{1}{2}mv_0^2$$

Sur l'orbite circulaire, elle vaudra :

$$\mathcal{E}_m = -\frac{GmM_T}{2R}$$

On aura donc du lui communiquer l'énergie :

$$\Delta\mathcal{E}_m = -\frac{GmM_T}{2R_T} + \frac{GmM_T}{R} - \frac{1}{2}mv_0^2$$

d'autant plus faible que v_0 est élevée.

3) On a donc intérêt à placer les centres de lancement proches de l'équateur où λ est proche de 0.

Exercice n°3 • Deuxième vitesse cosmique



1) On a vu en cours :

$$v_\ell = \sqrt{\frac{2GM_A}{R_A}}$$

2) On trouve :

$$v_\ell (\text{Terre}) = 11 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1} \quad v_\ell (\text{Phobos}) = 11 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

3) Un bon sprinteur fait un 100 m en 10 s environ, il court donc à $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Il ne peut clairement pas échapper à l'attraction terrestre, mais presque pour Phobos. Usain Bolt le pourrait-il ? Pas certain qu'il pulvérise son records du 100 m sur Phobos où la gravité y est très faible, avec une combinaison spatiale...

4) On trouve :

$$v_{N_2} (\text{Terre}) = 540 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \ll v_\ell \quad v_{N_2} (\text{Phobos}) = 420 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \gg v_\ell$$

La vitesse d'agitation sur la Terre est très inférieure à la vitesse de libération : la Terre conserve donc une atmosphère. En revanche, Phobos n'est pas capable de retenir une atmosphère.

5) La taille correspondante est extrêmement petite :

$$R_{sch} (\text{Terre}) = 8,6 \text{ mm}$$

Exercice n°4 • Étude de l'atome d'hydrogène



1) Force électrostatique s'exerçant sur l'électron :

$$\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

2) Énergie potentielle électrostatique :

$$\mathcal{E}_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

3) Force centrale, donc $\vec{L} = \vec{cte}$ d'après le TMC. Ceci implique que le mouvement est plan.

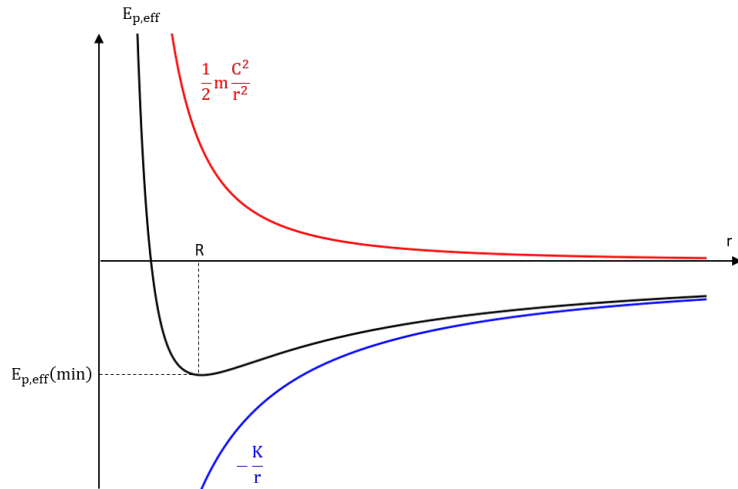
4) Cf. cours pour le détail :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}}_{\mathcal{E}_{p,eff}(r)}$$

5) Si $L \neq 0$, on a :

- un cercle si $\mathcal{E}_m = \min(\mathcal{E}_{p,eff})$;
- une ellipse si $\min(\mathcal{E}_{p,eff}) < \mathcal{E}_m < 0$;
- une parabole si $\mathcal{E}_m = 0$;
- une hyperbole si $\mathcal{E}_m > 0$.

Si $L = 0$, alors $\dot{\theta} = 0$, donc $\theta = cte$. On en déduit que l'électron ne tourne pas autour du noyau, mais y tombe en ligne droite.



6) Cherchons le rayon qui annule la dérivée de l'énergie potentielle effective.

$$\frac{d\mathcal{E}_{p,eff}}{dr} = -\frac{L^2}{m_e r_0^3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} = 0 \Rightarrow \boxed{r_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{m_e e^2}}$$

On en déduit l'énergie mécanique :

$$\boxed{\mathcal{E}_{m,0} = \mathcal{E}_{p,eff}(r_0) = -\frac{m_e}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 L} \right)^2}$$

7) On a donc :

$$r_n = r_1 \times n^2 \quad \text{avec : } r_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = 53 \text{ pm}$$

$$\mathcal{E}_{m,n} = \frac{\mathcal{E}_{m,1}}{n^2} \quad \text{avec : } \mathcal{E}_{m,1} = -\frac{m_e}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \right)^2 = -13,6 \text{ eV}$$

Exercice n°5 • Distance minimale d'approche d'un astéroïde



1) Le mouvement est à force centrale. Ainsi,

$$\vec{L}_O = \vec{cte} = m r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$$

On applique cette formule en à l'instant initial. On a :

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m \vec{v}_0 = -m r v_0 \sin(\theta) \vec{u}_z = -m b v_0 \vec{u}_z$$

On en déduit :

$$\boxed{C = r^2 \dot{\theta} = -b v_0 < 0}$$

2) L'énoncé précise qu'à l'instant initial, l'attraction terrestre peut encore être négligée. L'énergie mécanique s'identifie alors à l'énergie cinétique du système.

$$\boxed{\mathcal{E}_m = cte = \frac{1}{2} m v_0^2 > 0}$$

La trajectoire est donc une hyperbole.

3) Au point P , point le plus proche, par définition $\dot{r} = 0$ puisque r diminue de l'instant initial jusqu'à P puis augmente. On en déduit que :

$$\vec{v}_P = \dot{r}_P \vec{u}_r + r_P \dot{\theta}_P \vec{u}_\theta = r_P \dot{\theta}_P \vec{u}_\theta \perp \vec{OP}$$

4) Ainsi,

$$C = -r_p v_p \Rightarrow \boxed{v_p = v_0 \frac{b}{r_p}}$$

On utilise la conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{G m M_T}{r_p} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \left(v_0 \frac{b}{r_p} \right)^2 - \frac{G m M_T}{r_p}$$

On introduit le paramètre d . Après simplifications :

$$r_P^2 + 2dr_P - b^2 = 0 \Rightarrow r_{P,\pm} = -d \pm \sqrt{d^2 + b^2}$$

On conserve uniquement la solution positive :

$$r_P = -d + \sqrt{d^2 + b^2}$$

5) Il ne s'écrase pas sur Terre si :

$$r_P > R_T \Rightarrow b > \sqrt{(R_T + d)^2 - d^2}$$

Exercice n°6 • Transfert d'orbite



1) On a :

$$R_1 = R_T + h_1 = 6,98 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Pour l'orbite géostationnaire, cf. cours.

$$R_{geo} = 42,2 \cdot 10^6 \text{ m}$$

2) L'ellipse possède un demi grand axe

$$a = \frac{R_1 + R_{geo}}{2} = 24,6 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Avec les formules de cours, il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m(1) &= -\frac{GmM_T}{2R_1} = -165 \cdot 10^9 \text{ J} \\ \mathcal{E}_m(ellipse) &= -\frac{GmM_T}{2a} = -47,0 \cdot 10^9 \text{ J} \\ \mathcal{E}_m(geo) &= -\frac{GmM_T}{2R_{geo}} = -27,4 \cdot 10^9 \text{ J} \end{aligned}$$

3) D'après le TEC, la variation d'énergie cinétique aux points P et A est égale au travail fourni par le moteur en ces points.

$$\begin{aligned} W_P &= \Delta \mathcal{E}_c(P) = \mathcal{E}_m(ellipse) - \mathcal{E}_m(1) = 118 \cdot 10^9 \text{ J} \\ W_A &= \Delta \mathcal{E}_c(A) = \mathcal{E}_m(geo) - \mathcal{E}_m(ellipse) = 19,6 \cdot 10^9 \text{ J} \end{aligned}$$

4) Vitesse sur une orbite circulaire :

$$\begin{aligned} v_1 &= v(P^-) = \sqrt{\frac{GM_T}{R_1}} = 7,55 \cdot 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \\ v_{geo} &= v(A^+) = \sqrt{\frac{GM_T}{R_{geo}}} = 3,07 \cdot 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \end{aligned}$$

Au niveau du points P :

$$W_P = \frac{1}{2}mv^2(P^+) - \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow v(P^+) = \sqrt{\frac{2W_P}{m} + v_1^2} = 9,90 \cdot 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

De même pour A :

$$v(A^-) = \sqrt{v_{geo}^2 - \frac{2W_A}{m}} = 1,64 \cdot 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

5) La durée du transfert correspond à la moitié de la période de l'orbite. Ainsi, d'après la troisième loi de Kepler, on a :

$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM_T}} = 1,92 \cdot 10^4 \text{ s} = 5,32 \text{ heures}$$

Exercice n°7 • Chute d'un satellite



1) D'après la troisième loi de Kepler :

$$T_0^2 = \frac{4\pi^2 r_0^3}{GM_T} \Rightarrow r_0 = \left(\frac{T_0^2 GM_T}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 6,78 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Enfin,

$$v_0 = \frac{2\pi r_0}{T_0} = 7,66 \cdot 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

2) On applique le TMC au satellite dans le référentiel géocentrique supposé galiléen :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \underbrace{\vec{M}_O(\vec{F}_{grav})}_{=\vec{0}} + \vec{OM} \wedge (-\alpha \vec{v})$$

Or,

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m \vec{v}$$

On en déduit :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = -\frac{\alpha}{m} \vec{L}_O \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} + \frac{\vec{L}_O}{\tau} = \vec{0}} \quad \text{avec :} \quad \boxed{\tau = \frac{m}{\alpha}}$$

3) La solution est

$$\vec{L}_O = \vec{A} e^{-t/\tau}$$

Avec $\vec{A}$ un vecteur constant que l'on détermine grâce aux conditions initiales. Puisque $\vec{A}$ est constant, sa direction est fixe, le mouvement a donc lieu dans le plan perpendiculaire à $\vec{A}$. On place une base polaire dans ce plan.

$$\vec{L}_O(t=0) = \vec{A} = mr_0 v_0 \vec{u}_z$$

Ainsi,

$$\boxed{\vec{L}_O = mr_0 v_0 e^{-t/\tau} \vec{u}_z}$$

4) On a : $\tau \simeq 4 \cdot 10^9 \text{ s} \gg T_0$.

Puisque $\tau \gg T_0$, la variation d'altitude sur une révolution est négligeable devant le rayon de l'orbite, on peut considérer que la trajectoire a été pratiquement circulaire.

5) Puisqu'on prend pour approximation que le mouvement est toujours circulaire (avec un rayon dépendant du temps), on a :

$$\vec{v}(t) = \underbrace{\dot{r}(t)}_{\simeq 0} \vec{u}_r + r(t) \omega \vec{u}_\theta = v(t) \vec{u}_\theta = \sqrt{\frac{GM_T}{r(t)}} \vec{u}_\theta = v_0 \sqrt{\frac{r_0}{r(t)}} \vec{u}_\theta$$

Ainsi, on a :

$$\vec{L}_O(t) = mr_0 v_0 e^{-t/\tau} \vec{u}_z = r(t) \vec{u}_r \wedge m \vec{v}(t) \Rightarrow \boxed{\vec{OM} = r_0 e^{-2t/\tau} \vec{u}_r}$$

Vérifions l'hypothèse. Le rayon initial vaut $r_0 = 6,78 \cdot 10^6 \text{ m}$. La chute d'altitude à l'issue du premier tour vaut :

$$\Delta r = r_0 (1 - e^{-2T_0/\tau}) \simeq 20 \text{ m} \ll r_0$$

La variation d'altitude est bien négligeable. Finalement :

$$\boxed{\vec{v}(t) = v_0 e^{t/\tau} \vec{u}_\theta}$$

6) L'énergie potentielle $\mathcal{E}_p = -\frac{GmM_T}{r}$ diminue au cours du temps puisque r diminue ($\mathcal{E}_p$ augmente en valeur absolue).

L'énergie cinétique $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$ augmente au cours du temps (malgré une force de frottement !) puisque v augmente.

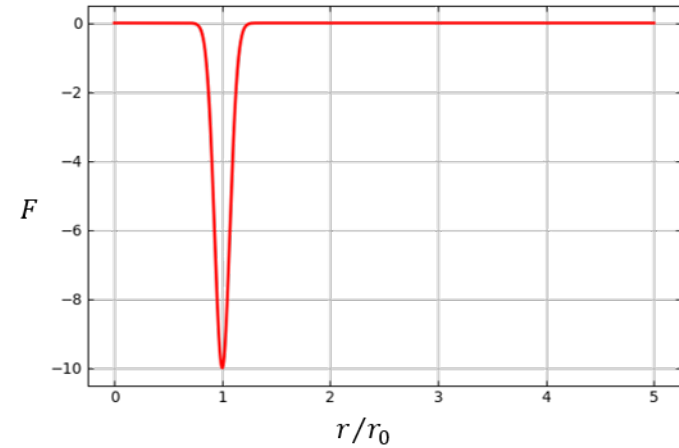
7) D'après le TEC, si on souhaite une variation nulle d'énergie cinétique afin de se maintenir sur l'orbite initiale, il faut que la puissance fournie par les moteurs compense la puissance de la force de frottement.

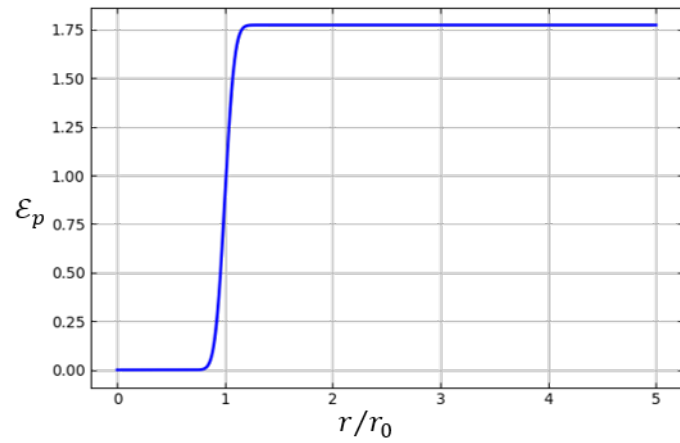
$$0 = \mathcal{P}_m - \alpha v_0^2 \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_m = \alpha v_0^2 = 6 \text{ kW}}$$

Exercice n°8 • Modèle d'interaction forte

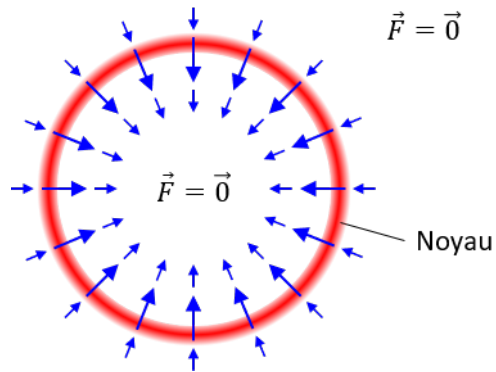


1) Graphes :





$F(r)$: force de rappel vers le centre uniquement lorsque le neutron est proche de $r = r_0$ car $r_0 \gg d$. Il y a un gain en énergie à se trouver dans $r < r_0$. Le déplacement est libre (pas de force) pour $r < r_0$ et $r > r_0$.

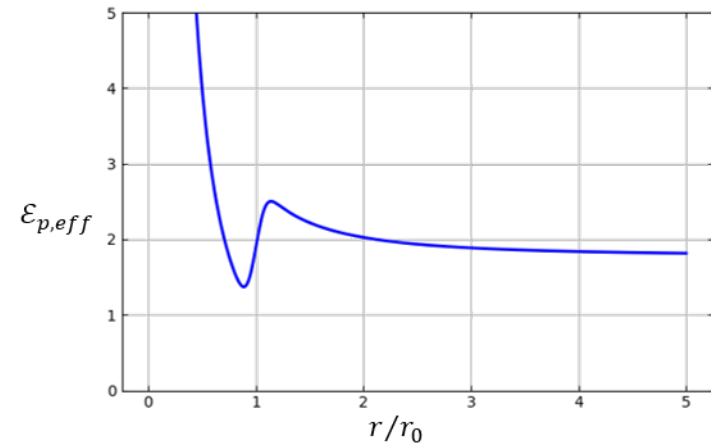


2) r_0 : taille du noyau ; d : portée de l'interaction forte et U_0 : gain en énergie à se trouver dans le noyau.

3) Mouvement à force centrale conservative : le moment cinétique et l'énergie mécanique se conservent. L'énergie potentielle effective vaut (avec C la constante des aires) :

$$\mathcal{E}_{p,eff} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + \mathcal{E}_p$$

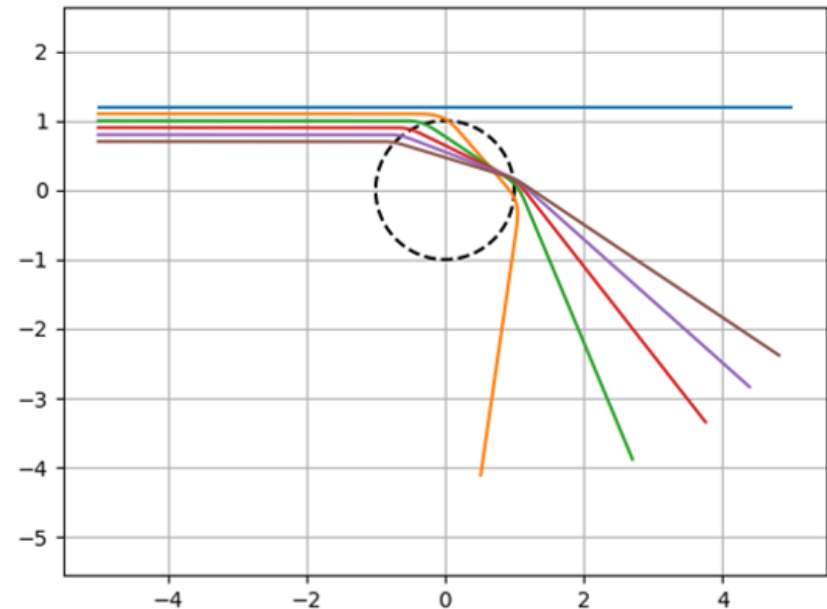
Graphes :



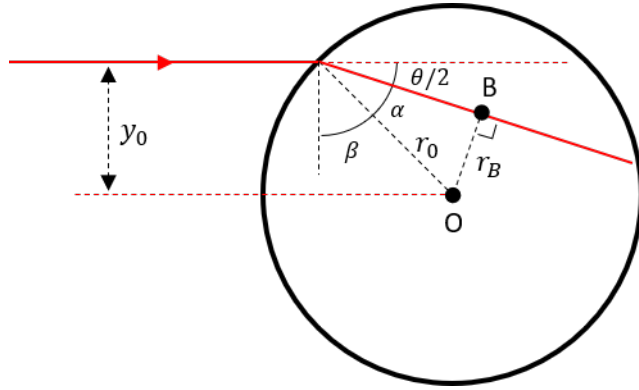
On peut donc former des états liés si l'énergie mécanique du système vérifie :

$$\min(\mathcal{E}_{p,eff}) < \mathcal{E}_m < \mathcal{E}_{p,eff}(r = +\infty)$$

4) Puisque $r_0 \gg d$, la force est nulle dans tout l'espace, sauf pour $r \simeq r_0$. La trajectoire est donc rectiligne uniforme sauf pour $r \simeq r_0$.



5) Le problème est symétrique par rapport à la droite (OB) . L'angle de déviation dans le noyau vaut donc $\theta/2$.



On pose $U_{max} = \max(\mathcal{E}_p)$. Les conservations du moment cinétique et de l'énergie mécanique donnent :

$$L = v_0 y_0 = r_B v_B \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} m v_0^2 + U_{max} = \frac{1}{2} m v_B^2$$

Ainsi,

$$r_B = \frac{v_0 y_0}{\sqrt{v_0^2 + 2U_{max}/m}}$$

De plus,

$$\cos(\beta) = \frac{y_0}{r_0} \quad \sin(\alpha) = \frac{r_B}{r_0}$$

On obtient donc :

$$\theta(y_0) = \pi - 2 \arccos\left(\frac{y_0}{r_0}\right) - 2 \arcsin\left(\frac{v_0 y_0}{r_0 \sqrt{v_0^2 + 2U_{max}/m}}\right)$$

6) On se place dans le noyau, donc : $\mathcal{E}_p(r) = 0$. On injecte la solution proposée dans l'équation différentielle donnée. On obtient, après simplification par le terme exponentielle :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{f''(r)}{r} = E \frac{f(r)}{r} \Rightarrow f''(r) + k^2 f(r) = 0 \quad \text{avec :} \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

La solution s'écrit donc :

$$f_{int}(r) = A \cos(kr) + B \sin(kr)$$

La fonction d'onde ne doit pas diverger en $r = 0$. Donc $A = 0$. Bilan, à l'intérieur :

$$f_{int}(r) = B \sin(kr)$$

On se place à l'extérieur du noyau, donc : $\mathcal{E}_p(r) = U_{max}$. On injecte la solution proposée dans l'équation différentielle donnée. On obtient, après simplification :

$$f''(r) - K^2 f(r) = 0 \quad \text{avec :} \quad K = \sqrt{\frac{2m(U_{max} - E)}{\hbar^2}}$$

La solution s'écrit donc :

$$f_{ext}(r) = C e^{Kr} + D e^{-Kr}$$

La fonction d'onde ne doit pas diverger en $r = \infty$. Donc $C = 0$. Bilan, à l'extérieur :

$$f_{ext}(r) = D e^{-Kr}$$

7) Par continuité de f et f' en $r = r_0$, on a :

$$B \sin(kr_0) = D e^{-Kr_0} \quad \text{et} \quad Bk \cos(kr_0) = -DK e^{-Kr_0}$$

On prend le rapport :

$$\frac{\tan(kr_0)}{k} = -\frac{1}{K} \Rightarrow \tan(kr_0) = -\frac{k}{K}$$

Ainsi, il existe un ou des états liés s'il existe une ou des énergies E qui vérifient l'équation suivante :

$$\tan\left(\sqrt{\frac{2mEr_0^2}{\hbar^2}}\right) = -\sqrt{\frac{E}{U_{max} - E}}$$